Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica appello straordinario	codice 568957 03 novembre 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro.
Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	d
3	a
4	a
5	b
6	a
7	b
8	d
9	c
10	a

1. Il massimo della funzione $f : [1{,}3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ vale

(a) -20 (b) 80 ► (c) -18 (d) -28

Soluzione:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x \qquad f : [1,3] \to \mathbb{R}$

La funzione è continua e il dominio è limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, esistono massimo e minimo di f.

Cerchiamo i punti stazionari interni.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$

$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{3} = \dfrac{-3 \pm 9}{3} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

L'unico punto interno all'intervallo è $x_0 = 2$.

Il massimo si troverà quindi in $x_0 = 2$ oppure in uno degli estremi dell'intervallo.

$f(1) = 1 + 3 - 24 = -20$

$f(2) = 8 + 3 \cdot 4 - 24 \cdot 2 = 8 + 12 - 48 = -28$

$f(3) = 27 + 3 \cdot 9 - 24 \cdot 3 = 27 + 27 - 72 = -18$

quindi $\max(f) = -18$.

2. $\lim_{x \to -\infty} (1 + e^x) \sin x =$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ ► (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x) = (1+e^x)\sin x$

Consideriamo la successione $a_n = -n\pi$ e osserviamo che

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1+e^{-n\pi}\right)\sin(-n\pi) = \lim_{n\to\infty} \left(1+e^{-n\pi}\right)\cdot 0 = 0$$

Consideriamo $b_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$. Risulta che $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

e che

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1+e^{\frac{\pi}{2}-2n\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-2n\pi\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+e^{\frac{\pi}{2}-2n\pi}\right)\cdot 1 = 1+e^{-\infty} = 1+0 = 1.$$

Poiché i due limiti sono diversi, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

non esiste.

3. $\displaystyle\int_0^\pi 3x\cos x\,dx =$

► (a) -6 (b) 0 (c) π (d) $\frac{3}{2}$

Soluzione:

$\int 3x\cos x\,dx$ integriamo per parti derivando x e integrando $\cos x$

$$= 3\int x\cos x\,dx = 3\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\right) =$$

$$= 3(x\sin x + \cos x) + c$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi 3x\cos x\,dx = \left[3(x\sin x+\cos x)\right]_0^\pi = 3(\cancel{\pi\cdot\sin\pi} + \cos\pi)$$

$$- 3(\cancel{0\cdot\sin 0} + \cos 0) = 3(-1) - 3\cdot 1 = -6$$

4. $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt =$

► (a) $+\infty$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 1 (d) 0

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $\frac{t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt = \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt = t - \operatorname{arctg} t + c$$

quindi

$$\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \Big[t - \operatorname{arctg} t\Big]_1^x = x - \operatorname{arctg} x - (1 - \operatorname{arctg} 1) =$$

$$= x - \operatorname{arctg} x - 1 + \frac{\pi}{4} \longrightarrow +\infty - \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{4} = +\infty \quad \text{per } x \to +\infty.$$

5. La funzione $F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$

(a) ha un asintoto verticale per $x\to 0^+$

▶ (b) è limitata inferiormente

(c) ha un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

(d) è limitata superiormente

Soluzione:

$$F(x)=\int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt \qquad F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}.$$

La funzione $f(t)=\frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{2+t^2}}$ è continua $\forall\, t\in(0,+\infty)$

e $f(t)>0$ $\forall\, t\in(0,+\infty)$. Ne segue che

$F(x)>0$ $\forall\, x\in(0,+\infty)$, quindi F è limitata inferiormente.

6. $$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-9}}$$

▶ (a) converge

(b) non esiste

(c) diverge positivamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)\sqrt{x^2-9}}$ e osserviamo che

$f(x) > 0 \quad \forall x \in [3, +\infty)$.

Poiché $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 4$. Osserviamo che

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+3)\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \frac{1}{(x^2+3)(x+3)^{1/2}(x-3)^{1/2}}$$

e scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{(x-3)^{1/2}}$. Poiché $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{1/2}}\,dx$

converge e $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)^{1/2}}}{(x^2+3)(x+3)^{1/2}\cancel{(x-3)^{1/2}}} = \frac{1}{12 \cdot \sqrt{6}}$,

per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx$ converge.

Scegliamo ora $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} = 1.$$

Poiché $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Unendo i due risultati otteniamo che $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\log(n^2+1) - 2\log n\right)\sin n =$

(a) $+\infty$ ► (b) 0 (c) 1 (d) non esiste

Soluzione:

Osserviamo che

$$\log(n^2+1) - 2\log n = \log(n^2+1) - \log(n^2) = \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)$$

dove abbiamo usato $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ con la sostituzione $t = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\log(n^2+1) - 2\log n\right)\sin n = \lim_{n\to+\infty} \cancel{n} \cdot \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\left(1+o(1)\right)\sin n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right)\sin n = 0 \cdot 1 \cdot \text{limitata} = 0.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\sin n)^{(n^2)}}{n(\log n)^2}$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente

(b) diverge positivamente

(c) diverge negativamente

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\sin n)^{(n^2)}}{n(\log n)^2}$$

la serie non è a termini di segno costante. Proviamo la convergenza assoluta.

$$\left|\frac{(\sin n)^{(n^2)}}{n(\log n)^2}\right| \leq \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Osserviamo che $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\log n)^2}$ è del tipo $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ con $\alpha = 1$ e $\beta > 1$, quindi converge. Per il criterio del confronto allora anche $\displaystyle\sum_n \frac{(\sin n)^{(n^2)}}{n(\log n)^2}$ converge quindi la serie originale converge assolutamente.

9. L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 - yx^2 = 0\}$ è costituito da

(a) due rette (b) un punto ► (c) tre rette (d) una retta

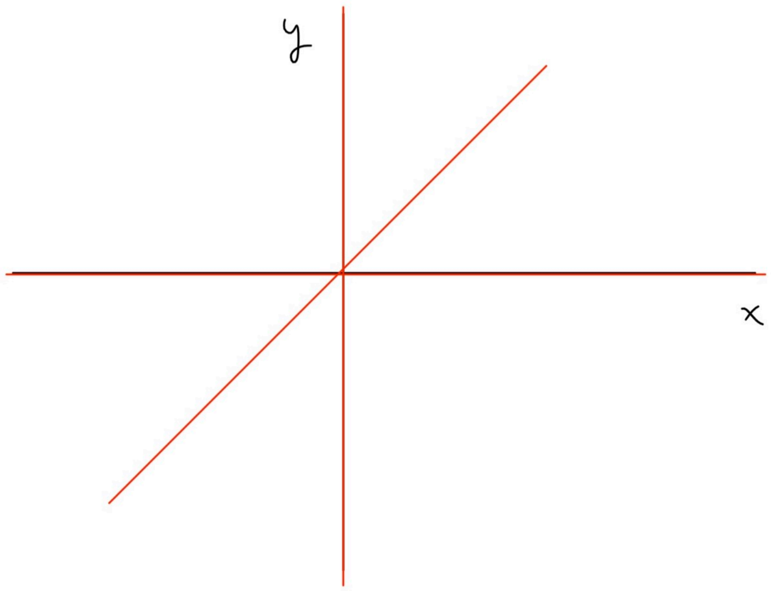
Soluzione:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 - yx^2 = 0\}$.

$xy^2 - yx^2 = xy(y-x)$

quindi $(x,y) \in A \iff xy(y-x) = 0 \iff x=0 \vee y=0 \vee y=x$

l'insieme A è quindi costituito da 3 rette



10. La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^6 + y^4}{x^3 + xy^2}$ sul dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\}$

► (a) non ha né massimo né minimo (b) ha massimo ma non ha minimo
(c) ha minimo ma non ha massimo (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$f:\Omega\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=\dfrac{x^6+y^4}{x^3+xy^2} \quad , \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\geq 0\}.$

Osserviamo che $f(x,y)=\dfrac{x^6+y^4}{x(x^2+y^2)}>0 \quad \forall\,(x,y)\in\Omega.$

Consideriamo ora la restrizione di f alla curva $\gamma(t)=(t,0)$, $t>0$

$$\lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t))=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^6+0}{t^3+0}=\lim_{t\to+\infty} t^3=+\infty$$

quindi f non ha massimo.

Sempre sulla stessa curva

$$\lim_{t\to0^+} f(\gamma(t))=\lim_{t\to0^+} t^3=0 \quad .$$

Poiché $f(x,y)>0 \ \forall(x,y)\in\Omega$, dall'ultimo limite otteniamo che $\inf(f)=0$ ma non esiste nessun punto di Ω dove f sia uguale a 0, quindi f non ha minimo.

codice 568957